级数：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Cauchy 收敛准则：部分和之差 ($\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, $n>N$, $\forall p\in N^+$ ..)

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和有界

*仅适用于正项级数

- 比较判别法 (p-级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$，几何级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n$) 用于比较
- 极限判别法 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} (0,+\infty) \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$
- Taylor 展开判别.（阶的估计） （放缩）
- 比值判别法 $\begin{cases} 1)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad (0<q<1) \\ 2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \end{cases}$
- 根值判别法 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$
- 积分判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ （单调递减，大于0）

交错项级数：Leibniz 判别法 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

($\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散)

条件/绝对收敛

★ A-D 判别法.

Abel: $\{a_n\}$ 单调有界 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛

Dirichlet: $\{a_n\}$ 单调 $\to 0$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 部分和有界

函数列/函数项级数 一致收敛 $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$

- $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$ 当 $n>N$ 对 $\forall x\in D$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, 部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于 $S(x)$

or $\{r_n(x)\}=\{S(x)-S_n(x)\} \rightrightarrows 0$

(非一致收敛?)

(内闭一致收敛)

*A-D 判别法: Abel: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 部分和一致收敛, v_n 单调一致有界

Dirichlet: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 部分和一致有界, v_n 单调一致 $\to 0$

幂级数的收敛域及和函数

收敛半径 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$ $r=\frac{1}{l}$ or $+\infty$ or 0 (Abel 定理)

端点敛散性

换元、直接作比、求导/积分,去分母/子

幂级数展开 (Taylor)

Fourier 级数

Fourier 系数 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi}{l}nx\,dx$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi}{l}nx\,dx$

周期为 $2l$ 函数的Fourier级数:

Dirichlet 收敛定理

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi}{l}nx+b_n\sin\frac{\pi}{l}nx\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

函数的奇/偶/周期延拓

空间解几 ...

多元函数微分学

多元函数的极限（区别偏导、方向导数、全微分的极限）

多元函数的连续 ⇒ 有界性、最值定理、零点存在、介值定理…

多元函数的偏导数：复合函数链式法则：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

隐函数存在性定理：

二维

(1) $F(P_0)=F(x_0,y_0)=0$

(2) 在 $U(P_0)$ 内有连续偏导 F_x', F_y'

(3) $F_y'(P_0)\neq 0$

则 $\exists\,\delta>0$，对 $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，$F(x,y)=0$ 唯一确定 $y=f(x)$

使得 $F(x,f(x))=0$，$y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有连续导数 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$

三维

or (1) $F(M_0)=F(x_0,y_0,z_0)=0$

(2) 在 $U(M_0)$ 内有连续偏导 F_x', F_y', F_z'

(3) $F_z'(M_0)\neq 0$

则 $\exists\,\delta>0$ 对 $\forall\,(x,y)\in U((x,y),\delta)$ $F(x,y,z)$ 唯一确定 $z=f(x,y)$

使得 $F(x,y,f(x,y))=0$，$z=f(x,y)$ 在邻域内有连续偏导

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$

多元函数的全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ （概念）

$z=f(x,y)$ 可全微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)}{\rho}=0$

证明可全微：偏导存在、全增量误差、与 ρ 比较

（偏导存在 ⇐ 可全微 ⟸ 偏导连续）

一阶微分的形式不变性：$z=f(u,v)$，$u=g(x,y)$，$v=h(x,y)$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

方向导数　定义：方向 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ $(|\vec{l}|=1)$

$U(M_0)$ 内取 M s.t. $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{l}$ 同向

$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}$ 为沿 $\vec{l}$ 的方向导数

计算：若 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微

$l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 单位化 $\frac{\partial f}{\partial l}=f_x'\cos\alpha+f_y'\cos\beta+f_z'\cos\gamma$

$=\mathrm{grad}f\cdot l=|\mathrm{grad}f|\cdot|l|\cdot\cos\theta$

梯度　$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k=\nabla f$　(∇ 为 Nabla 算子)

最大的方向导数

多元函数的极值　必要条件 — 所有一阶偏导为 0

(梯度、全微分为 0、切平面水平)

充分条件 — $A=f_{xx}''(P_0)$, $B=f_{xy}''(P_0)$, $C=f_{yy}''(P_0)$

$\Delta=B^2-AC$
- $\Delta<0$ 有极值：$A>0$ 极小，$A<0$ 极大
- $\Delta>0$ 无极值
- $\Delta=0$?

(Hessian 矩阵)

Lagrange 乘数：$z=f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下的极值

构造 Lagrange 函数：$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

$$\begin{cases}L_x=f_x'+\lambda g_x'=0\\ L_y=f_y'+\lambda g_y'=0\\ L_\lambda=g(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\\ y=\\ \lambda=\end{cases}$$

(非线性：观察对称性)

曲线的切线

参数方程

- $r(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$在(x_0,y_0,z_0)处切线

切向量 $s=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$

切线方程 l: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程 π:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

一般方程

- $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切线

两曲面在M_0处切平面交线

$$l:\begin{cases}F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0\\G_x'(M_0)(x-x_0)+G_y'(M_0)(y-y_0)+G_z'(M_0)(z-z_0)=0\end{cases}$$

切向量 $s=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$

$$l:\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

曲面的切平面:

1. Σ: $F(x,y,z)=0$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切平面

法向量 $n=\{F_x',F_y',F_z'\}$

$$\pi: F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0$$

2. $z=f(x,y)$, π法向量$\{f_x',f_y',-1\}$

$$\pi: z=f_x'(M_0)(x-x_0)+f_y'(M_0)(y-y_0)+z_0$$

比较光滑曲面切平面、全微分、Taylor展开.

连续、可偏导、可微的关系?

重积分

二重积分性质：线性性、区间有限可加性、保号/保不等式性

绝对值不等式、估值不等式、中值定理

计算：直角坐标系……

多元函数奇偶性

极坐标

任意坐标

三重积分计算 投影法（先单后重）

截面法（先重后单）

体积元 $\rho^2 \sin\varphi$ → 球面、柱面坐标、任意坐标

r →

线面积分

第一型曲线积分计算：参数化，求弧微分

$$ds = |d r(t)| = |r'(t)|dt = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

长方体对角线

下限<上限 曲线积分/重积分

能否用方程代入？

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,ds = \begin{cases} \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt \\ \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \\ \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \\ \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\cdot\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta \end{cases}$$

平面曲线

$y=y(x)$

极坐标方程 $r=r(\theta)$

（弧微分公式）

弧微分——切向量的模. $r'(t)=\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$

第二型曲线积分

$C: y=y(x)$，$y(x)$ 可导：$\int_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,y(x))\,dx$；$\int_C Q(x,y)\,dy = \int_a^b Q(x,y(x))y'(x)\,dx$

光滑曲线 $\Gamma: r(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$：$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt$

外逆内顺

Green公式 $\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \oint_C Pdx + Qdy$（一阶连续偏导区间）

复杂曲线上的线积分：$\int_C = \oint_{C+L} - \int_L = \iint_D - \int_L$　　奇异点"挖洞"_闭合

曲线积分与路径无关的条件　单连通

等价条件

(1) $\forall$ 分段光滑曲线 L，$\oint_L Pdx + Qdy = 0$

(2) $\forall$ 分段光滑曲线 L，$\int_A^B Pdx + Qdy$ 与路径无关，仅与起点、终点有关。

(3) $Pdx + Qdy$ 是 D 内二元函数 $u(x,y)$ 全微分，即 $du = Pdx + Qdy$

(4) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 处处成立

第一型曲面积分

显式曲面 $z = z(x,y)$：$S = \iint_D \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, dxdy$

隐式曲面 $F(x,y,z) = 0, F_z' \neq 0$：$S = \iint_D \frac{1}{|F_z'|} \sqrt{(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2}\, d\sigma$

曲面的面积元：$dS = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, d\sigma$ / $\cos\gamma = \frac{F_z'}{|n|}$，$dS = \frac{1}{\cos\gamma} d\sigma$

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\, dxdy$

第二型曲面积分

$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$：

(1) 投影法 $\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\, dxdy$（上侧）　下侧取负

(2) 坐标变换 $\iint_S (-z_x' P - z_y' Q + R)\, dxdy$

(3) 化第一型曲面积分 $\iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$

(4) **Gauss公式** $\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$　分片光滑闭曲面 一阶连续偏导

（第二型勿用对称性）

两类曲面积分之间的关系

光滑曲面 Σ 在 $M(x,y,z)$ 处单位法向量 $n^\circ=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

面积元为 dS, 则: $d\vec{S}=dS\cdot n^\circ=dS\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{dydz,dzdx,dxdy\}$

"有向"面积元

因此 $\begin{cases} dydz=dS\cos\alpha \\ dzdx=dS\cos\beta \\ dxdy=dS\cos\gamma \end{cases}$

设 $A(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$

则 $\iint_\Sigma A\cdot dS=\iint_\Sigma (A\cdot n^\circ)\,dS$. (流量)

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

Stokes 公式: $\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$ Σ 方向与 L 方向成右手系

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

曲面积分与路径无关的条件 (某个闭曲线...)

(旋度为零)

场论初步: 梯度 $\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$

散度 $\mathrm{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

旋度 $\mathrm{rot}A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$